Características de la respuesta temporal

1. SISTEMA DE PRIMER ORDEN

1.1. Características

Si un sistema de primer orden como el de la figura 1 se excita con una entrada escalón de la forma:

$$x(t) = \begin{cases} m & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t \le 0 \end{cases}$$

el sistema responde con una salida

$$y(t) = \begin{cases} km\left(1 - e^{-t/\tau}\right) & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t \le 0 \end{cases}$$

La figura 2 representa la respuesta de un sistema de primer orden ($k = 1$ y $\tau = 1$) a una entrada escalón de amplitud m = 1:

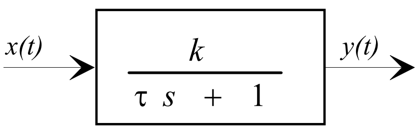

Fig. 1. Sistema de 1er orden.

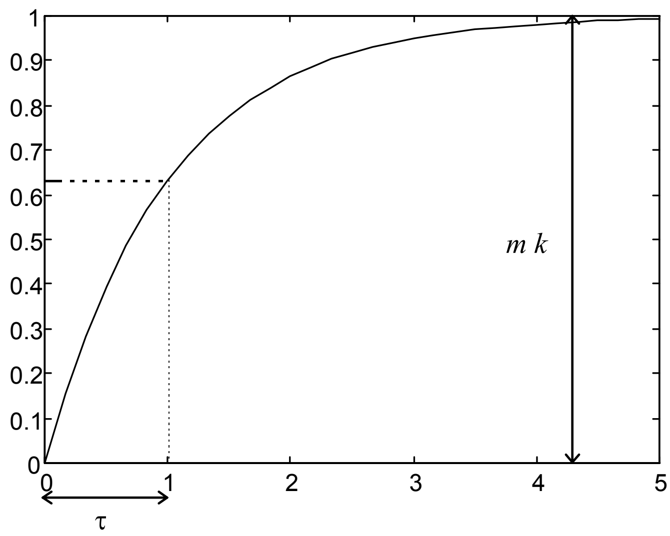

Fig. 2. Respuesta a entrada escalón.

El valor estacionario de la salida ($\lim_{t \to \infty} y(t)$) es $k * m$. La constante de tiempo τ es el tiempo que tarda el sistema en alcanzar el 63.2% del valor final.

1.2. Procedimiento para la determinación de k y τ a partir de la respuesta temporal

1. Registrar la respuesta del proceso a una entrada escalón, de amplitud y de instante de cambio conocidos. Para que el registro sea válido, la salida debe haber alcanzado el estacionario. Como la entrada escalón se genera a partir de una onda cuadrada, es conveniente elegir el periodo P de la misma mucho mayor que la constante de tiempo del sistema.
2. Obtener la ganancia k del modelo como el cociente entre el cambio observado en la salida del proceso y la amplitud del escalón de entrada.
3. Obtener la constante de tiempo como el tiempo transcurrido hasta que se alcanza el 63.2% del valor estacionario de la salida.

2. SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN

2.1. Características

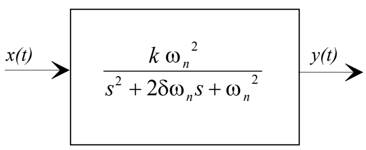

Fig. 3. Sistema de 2º orden.

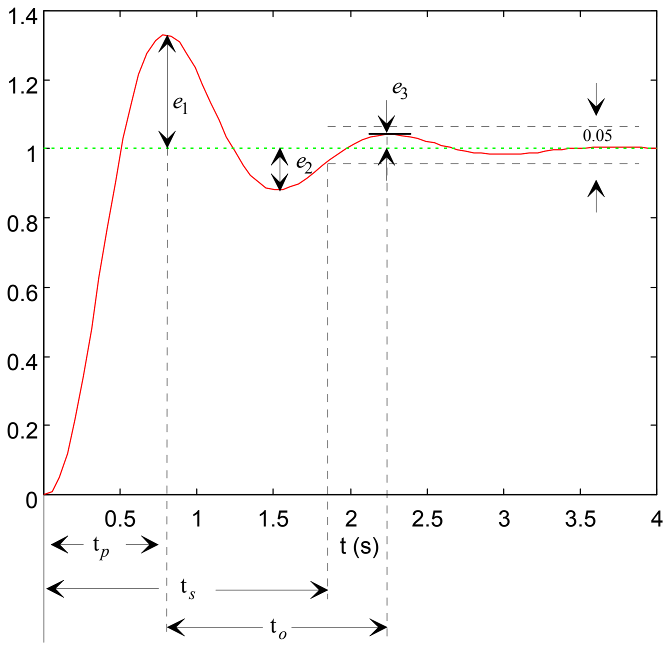

Fig. 4. Respuesta del sistema de 2º orden con k=1 a un escalón unitario.

Si un sistema de segundo orden subamortiguado (0 < δ < 1) como el de la figura 3 se excita con una entrada escalón de amplitud m, tiene la siguiente respuesta

$$y(t) = km\left(1 - \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}}\operatorname{sen}(\omega t + \phi)\right), \quad \text{donde} \quad \phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}\right)$$

siendo k = ganancia en estado estacionario

δ = coeficiente de amortiguamiento

ω_n = frecuencia natural y $\omega = \omega_n \sqrt{a - \delta^2}$

Un cambio en δ afecta al carácter oscilatorio amortiguado de la respuesta. Cuando δ =1 (amortiguamiento crítico) la respuesta deja de tener el carácter anterior (oscilatorio amortiguado) y la salida tiende exponencialmente a la entrada. El cambio en ω_n afecta únicamente a la frecuencia forzada y en definitiva a la velocidad de respuesta (tiempo de asentamiento, tiempo de subida,...).

La figura 4 representa la respuesta del sistema de segundo orden con ganancia unidad a un escalón unitario, cuyos máximos relativos e_n se presentan en los instantes t_n,

$$e_n = e^{-\delta\omega_n t_n}, \qquad t_n = \frac{n\pi}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}} \quad ; \quad n = 1,3,5,\ldots$$

2.2. Determinación de k, δ y ω_n a partir de la respuesta temporal

La ganancia k se determina del cociente entre la salida del proceso en estado estacionario y la amplitud del escalón de entrada. Los parámetros δ y ω_n del sistema se pueden determinar a partir de la respuesta temporal, midiendo la máxima sobreelongación M_p (valor del primer máximo e_1) y el instante $t_p = t_1$ en que se produce. El procedimiento es el siguiente:

1. Aplicar una entrada de onda cuadrada.
2. Obtener la ganancia k del modelo como el cociente entre la amplitud de salida del proceso en estado estacionario y la amplitud del escalón de entrada.
3. Medir M_p y t_p. (Recuérdese que los máximos de sobreelongación se miden respecto al valor de la salida en el estacionario).
4. A partir de la curva que relaciona M_p con δ (véase figura 5), o bien analíticamente utilizando la expresión

   $$\delta = \left| \frac{\ln(0.01M_p)}{\sqrt{\pi^2 + (\ln(0.01M_p))^2}} \right|, \; M_p \text{ porcentual,}$$

   Obtener el coeficiente de amortiguamiento δ.
5. Calcular ω_n a partir de la siguiente expresión: $\omega_n = \dfrac{\pi}{t_p\sqrt{1-\delta^2}}$

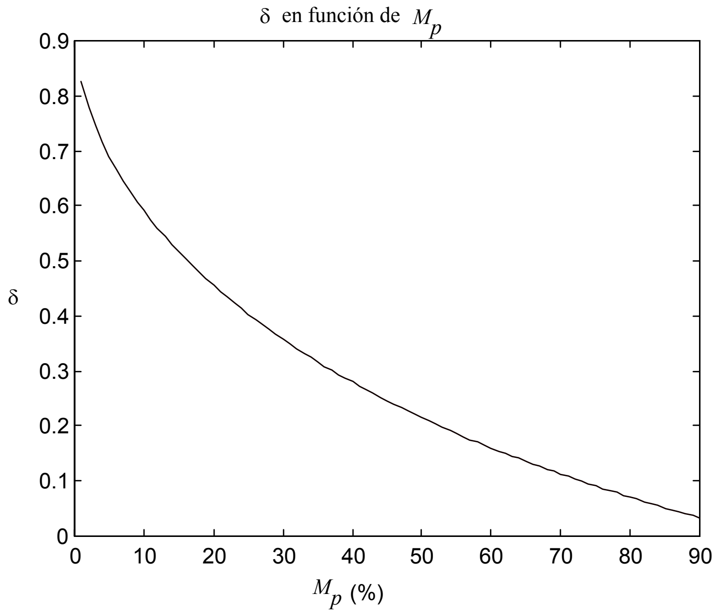

Fig. 5. Curva que relaciona M_p con δ